

第1讲 含参不等式（组）（一）（练习）

一、方程与不等式结合

1. 如果关于 x 的方程 $\frac{2x+a}{3} = \frac{4x+b}{5}$ 的解不是负值，那么 a 与 b 的关系是()
- A. $a > \frac{3}{5}b$ B. $b \geq \frac{3}{5}a$ C. $5a \geq 3b$ D. $5a = 3b$

【答案】C

【解析】解：解关于 x 的方程，得 $x = \frac{5a-3b}{2}$ ，

$\because$ 解不是负值，

$$\therefore \frac{5a-3b}{2} \geq 0,$$

解得 $5a \geq 3b$ 。

故选C。

【标注】【知识点】已知方程（组）解的范围，求参数范围

2. 关于 x 的一元一次方程 $4x - 2m + 1 = 5x - 7$ 的解是负数， m 的取值范围是()。
- A. $m < 0$ B. $m > 4$ C. $m < 4$ D. $m > 0$

【答案】B

【解析】 $\because 4x - 2m + 1 = 5x - 7$ ，

$$\therefore -x = 2m - 8,$$

$$x = 8 - 2m,$$

$$\therefore \text{由题可得：} 8 - 2m < 0,$$

$$-2m < -8,$$

$$m > 4.$$

故选B。

【标注】【知识点】已知方程（组）解的范围，求参数范围

3. 若关于 x 的方程 $3x + 3k = 2$ 的解是非负数，则 k 的值为()。
- A. $k > \frac{2}{3}$ B. $k \leq \frac{2}{3}$ C. k 为任何数 D. $k \geq \frac{2}{3}$

【答案】 B

【解析】 解关于 x 的方程 $3x + 3k = 2$ 得： $x = \frac{2 - 3k}{3}$ ，

$\therefore$ 方程的解是非负数，

$$\therefore x = \frac{2 - 3k}{3} \geq 0,$$

$$\text{解得：} k \leq \frac{2}{3}.$$

故选B.

【标注】 【知识点】 已知方程（组）解的范围，求参数范围

4. 已知关于 x 的方程 $x + m = 3(x - 2)$ 的解是正数，求 m 的取值范围.

【答案】 m 的取值范围为 $m > -6$.

【解析】 $x + m = 3(x - 2)$ ，

$$\therefore x + m = 3x - 6,$$

$$\therefore -2x = -6 - m,$$

$$\therefore x = 3 + \frac{1}{2}m,$$

$\therefore$ 方程的解是正数，

$$\therefore 3 + \frac{1}{2}m > 0,$$

$$\therefore m > -6,$$

即 m 的取值范围是 $m > -6$.

【标注】 【知识点】 已知方程（组）解的范围，求参数范围

5. 已知关于 x 、 y 的方程组 $\begin{cases} 2x + y = 1 + 3m \\ x + 2y = 1 - m \end{cases}$ 的解 x 、 y 满足 $x + y < 0$ ，则 m 的取值范围是_____.

【答案】 $m < -1$

【解析】 两式相加得 $x + y = \frac{2 + 2m}{3}$ ， $\frac{2 + 2m}{3} < 0$ ，得 $m < -1$.

【标注】 【知识点】 二元一次方程组解的情况

6. 若方程组 $\begin{cases} x - y = k + 3 \\ 2x + y = 5k \end{cases}$ 的解满足 $x + y < 2$ ，则 k 的取值范围是（ ）.

A. $k < -1$

B. $1 < k < 2$

C. $k < 1$

D. $-1 < k < 1$

【答案】C

【解析】
$$\begin{cases} x - y = k + 3 \\ 2x + y = 5k \end{cases},$$

解得
$$\begin{cases} x = 2k + 1 \\ y = k - 2 \end{cases},$$

$$\therefore x + y < 2,$$

$$\therefore 2k + 1 + k - 2 < 2,$$

$$3k - 1 < 2,$$

$$3k < 3,$$

$$\therefore k < 1.$$

【标注】【知识点】根据解的不等关系解含参的二元一次方程组

7. 已知关于 x, y 的方程组
$$\begin{cases} 2x + y = 1 - \frac{m}{4} \\ x - 2y = \frac{-3 - 8m}{4} \end{cases}$$
的解满足 $3x - 1 < y$, 则 m 的取值范围是_____.

【答案】 $m > -\frac{1}{3}$

【解析】
$$\begin{cases} 2x + y = 1 - \frac{m}{4} \text{ ①} \\ x - 2y = \frac{-3 - 8m}{4} \text{ ②} \end{cases},$$

$$\text{①} \times 2 + \text{②} \text{ 得: } 5x = 2 - \frac{m}{2} + \frac{-3 - 8m}{4} = \frac{5}{4} - \frac{5}{2}m,$$

$$x = \frac{1}{4} - \frac{1}{2}m,$$

$$\text{①} - \text{②} \times 2 \text{ 得: } 5y = 1 - \frac{m}{4} - \frac{-3 - 8m}{2} = \frac{5}{2} + \frac{15}{4}m,$$

$$y = \frac{1}{2} + \frac{3}{4}m,$$

$$3x - 1 < y,$$

$$3\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}m\right) - 1 < \frac{1}{2} + \frac{3}{4}m,$$

$$\frac{3}{4} - \frac{3}{2}m - 1 < \frac{1}{2} + \frac{3}{4}m,$$

$$-\frac{3}{2}m - \frac{3}{4}m < \frac{1}{2} + 1 - \frac{3}{4}$$

$$-\frac{9}{4}m < \frac{3}{4},$$

$$m > -\frac{1}{3}.$$

【标注】【知识点】已知方程组解的关系，求参数范围

8.

如果方程组 $\begin{cases} x - y = a + 3 \\ 2x + y = 5 \end{cases}$ 的解 x, y 满足 $x > 0, y < 0$, 求 a 的取值范围.

【答案】 $a > -\frac{1}{2}$.

【解析】 $\begin{cases} x - y = a + 3 \text{ ①} \\ 2x + y = 5 \text{ ②} \end{cases}$,

由①+②得: $3x = a + 8$,

$$x = \frac{a + 8}{3},$$

将 $x = \frac{a + 8}{3}$ 代入①得:

$$\frac{a + 8}{3} - y = a + 3,$$

$$-y = a + 3 - \frac{a + 8}{3},$$

$$-y = \frac{3a + 9 - a - 8}{3},$$

$$-y = \frac{2a + 1}{3},$$

$$y = -\frac{2a + 1}{3},$$

$\because x > 0, y < 0$,

$$\therefore \begin{cases} \frac{a + 8}{3} > 0 \text{ ③} \\ -\frac{2a + 1}{3} < 0 \text{ ④} \end{cases},$$

由③, 去分母得: $a + 8 > 0$,

移项得: $a > -8$,

由④, 去分母得: $2a + 1 > 0$,

移项得: $2a > -1$,

系数化为1得: $a > -\frac{1}{2}$,

综上: a 的取值范围是 $a > -\frac{1}{2}$.

【标注】【知识点】二元一次方程组解的情况

9. 已知方程组: $\begin{cases} y - 2x = m \\ 2y + 3x = m + 1 \end{cases}$ 的解 x, y 满足 $2x + y \geq 0$, 则 m 的取值范围是 ().

A. $m \geq -\frac{4}{3}$

B. $m \geq \frac{4}{3}$

C. $m \geq 1$

D. $-\frac{4}{3} \leq m \leq 1$

【答案】 A

【解析】 $\begin{cases} y - 2x = m \text{ ①} \\ 2y + 3x = m + 1 \text{ ②} \end{cases}$

②-① $\times$ 2得,

$$7x = -m + 1,$$

$$\text{解得 } x = \frac{-m+1}{7} \text{ ③},$$

把③代入①得,

$$y = \frac{5m+2}{7} \text{ ④},$$

$$\because 2x + y \geq 0,$$

$$\therefore \frac{-m+1}{7} \times 2 + \frac{5m+2}{7} \geq 0,$$

$$\text{解得 } m \geq -\frac{4}{3}.$$

【标注】【知识点】已知方程组解的关系，求参数范围

二、利用不等式解集求参数

1. 已知解集求字母取值范围

10. 已知不等式 $\frac{1}{2}(x-5) - 1 > x + m$ 的解集为 $x < 2$ ，则 m 的值为 _____.

【答案】 -4.5

【解析】 $\frac{1}{2}(x-5) - 1 > x + m,$

$$\frac{1}{2}x - \frac{5}{2} - 1 - x > m,$$

$$-\frac{1}{2}x > m + \frac{7}{2},$$

$$x < -2m - 7,$$

$\because$ 解集为 $x < 2$,

$$\text{则 } -2m - 7 = 2,$$

$$m = -4.5.$$

【标注】【知识点】由不等式（组）的解集求参数的范围

11. 已知不等式 $3x - a \leq 0$ 的解集为 $x \leq 5$ ，则 a 的值为 _____.

【答案】 15

【解析】 解不等式 $3x - a \leq 0$ 得，

$$x \leq \frac{a}{3},$$

$\therefore$ 不等式的解集为 $x \leq 5$,

$$\therefore \frac{a}{3} = 5,$$

解得 $a = 15$.

【标注】【知识点】由不等式（组）的解集求参数的范围

12. 如果关于 x 的不等式 $(a + 2018)x > a + 2018$ 的解集为 $x < 1$, 则 a 的取值范围是 () .

- A. $a < 0$ B. $a < -2018$ C. $a > 2018$ D. $a > -2018$

【答案】 B

【标注】【知识点】不等式（组）解的情况确定参数的范围

13. 若关于 x 的不等式 $(a - 5)x > 1$ 的解集为 $x < \frac{1}{a - 5}$, 则 a 的取值范围是 _____ .

【答案】 $a < 5$

【解析】 $\therefore$ 不等式 $(a - 5)x > 1$ 的解集为 $x < \frac{1}{a - 5}$,

$$\therefore a - 5 < 0,$$

$$\therefore a < 5.$$

【标注】【知识点】不等式（组）解的情况确定参数的范围

14. 若 $m > 7$, 试用 m 表示出不等式 $(7 - m)x > 1 - m$ 的解集 _____ .

【答案】 $x < \frac{1 - m}{7 - m}$

【解析】 $\therefore m > 7$,

$$\therefore 7 - m < 0.$$

$$\therefore x < \frac{1 - m}{7 - m}.$$

【标注】【知识点】由不等式（组）的解集求参数的范围

2. 已知解集求另一个不等式的解集

15.

已知 m 、 n 为实数，若关于 x 的不等式 $(2m - n)x + 3m - 4n < 0$ 的解集为 $x > \frac{4}{9}$ ，则关于 x 的不等式 $(m - 4n)x + 2m - 3n > 0$ 的解集为_____。

【答案】 $x > -\frac{1}{4}$

【解析】 $\because$ 不等式 $(2m - n)x + 3m - 4n < 0$ 的解集为 $x > \frac{4}{9}$ ，

$\therefore$ 解不等式 $(2m - n)x + 3m - 4n < 0$ 。

得： $x > \frac{4n - 3m}{2m - n}$ ，且 $2m - n < 0$ ， $\frac{4n - 3m}{2m - n} = \frac{4}{9}$ ，

即 $n = \frac{7}{8}m$ ， $2m - \frac{7}{8}m < 0$ ，

解得： $m < 0$ ， $n < 0$ ，

$\therefore (m - 4n)x + 2m - 3n > 0$ ，

$\therefore \left(m - \frac{7}{2}m\right)x > -2m + \frac{21}{8}m$ ， $-\frac{5}{2}mx > \frac{5}{8}m$ ， $x > -\frac{1}{4}$ ，

即不等式 $(m - 4n)x + 2m - 3n > 0$ 的解集是 $x > -\frac{1}{4}$ 。

【标注】【知识点】由一个已知不等式的解集求另一个不等式的解集

16. 已知关于 x 的不等式 $(a - 2b)x > 5a - 6b$ 的解集是 $x < 4$ ，试求不等式 $(a + b)x < a - b$ 的解集。

【答案】 $x > 3$ 。

【解析】 $x < \frac{5a - 6b}{a - 2b} = 4$ ，且 $a - 2b < 0$ ，

解得： $a = -2b < 0$ ，所以 $x > \frac{a - b}{a + b} = 3$ 。

【标注】【知识点】由一个已知不等式的解集求另一个不等式的解集

17. 已知关于 x 的不等式 $(2a - b)x > a - 2b$ 的解是 $x > \frac{5}{2}$ ，则关于 x 的不等式 $ax + b < 0$ 的解为_____。

【答案】 $x > -8$

【解析】 不等式 $(2a - b)x > a - 2b$ 系数化1得，

$x > \frac{a - 2b}{2a - b}$ ，

$\therefore$ 该不等式的解集为是 $x > \frac{5}{2}$ ，

$\therefore \frac{a - 2b}{2a - b} = \frac{5}{2}$ ，

$$\therefore b = 8a ;$$

将 $b = 8a$ 代入不等式 $ax + b < 0$ 得 ,

$$ax + 8a < 0 ,$$

移项得 ,

$$ax < -8a ,$$

又 $\because (2a - b)x > a - 2b$ 系数化1得 ,

$$x > \frac{a - 2b}{2a - b} ,$$

$$\therefore 2a - b > 0 ,$$

$$\text{即 } 2a - 8a > 0 ,$$

$$\text{即 } -6a > 0 ,$$

$$\therefore a < 0 ;$$

$\therefore$ 不等式 $ax + b < 0$ 的解集为 : $x > -8$.

【标注】【知识点】 由一个已知不等式的解集求另一个不等式的解集

18. 如果关于 x 的不等式 $(2m - n)x - m - 5n > 0$ 的解集为 $x < \frac{10}{7}$, 那么 , 关于 x 的不等式 $mx > n (m \neq 0)$ 的解集为 _____ .

【答案】 $x < \frac{13}{45}$

【解析】 $(2m - n)x > m + 5n ,$

因为解集为 $x < \frac{10}{7} ,$

所以 $2m - n < 0 , 2m < n ,$

$$x < \frac{m + 5n}{2m - n} ,$$

$$\therefore \frac{m + 5n}{2m - n} = \frac{10}{7} ,$$

$$\therefore 7m + 35n = 20m - 10n ,$$

$$\therefore 45n = 13m ,$$

$$\therefore m = \frac{45}{13}n ,$$

$$\therefore \frac{90}{13}n - n < 0 ,$$

$$\therefore n < 0 , m < 0 ,$$

$$mx > n ,$$

$$\therefore x < \frac{13}{45} .$$

【标注】【知识点】 由一个已知不等式的解集求另一个不等式的解集

19. 已知 a, b 为常数, 若 $ax + b > 0$ 的解集是 $x < \frac{1}{3}$, 求不等式 $bx - a < 0$ 的解集.

【答案】 $x < -3$.

【标注】【知识点】由一个已知不等式的解集求另一个不等式的解集

3. 含参不等式整数解问题

20. 若关于 x 的不等式 $x - a < 0$ 的正整数解只有3个, 则 a 的取值范围是 _____.

【答案】 $3 < a \leq 4$

【解析】解不等式得 $x < a$,
 $\therefore$ 不等式有正整数解3个,
 $\therefore$ 正整数解是1, 2, 3,
则 $3 < a \leq 4$.

【标注】【知识点】由不等式(组)的整数解情况求参数范围

21. 已知不等式 $2x - a \leq 0$ 的正整数解恰好是1, 2, 3, 4, 5, 那么 a 的取值范围是().

- A. $a > 10$ B. $10 \leq a \leq 12$ C. $10 < a \leq 12$ D. $10 \leq a < 12$

【答案】D

【解析】解不等式 $2x - a \leq 0$, 得: $x \leq \frac{1}{2}a$.
根据题意得: $5 \leq \frac{1}{2}a < 6$,
解得: $10 \leq a < 12$.
故选D.

【标注】【知识点】由不等式(组)的整数解情况求参数范围

22. 若关于 x 的不等式 $2x - m \geq 0$ 的负整数解为-1, -2, -3, 则 m 的取值范围是().

- A. $-8 < m \leq -6$ B. $-6 \leq m < -4$ C. $-6 < m \leq -4$ D. $-8 \leq m < -6$

【答案】A

【解析】解 $2x - m \geq 0$ 得 $x > \frac{m}{2}$.

则 $-4 < \frac{m}{2} \leq -3$,

解得： $-8 < m \leq -6$.

故选A.

【标注】【知识点】由不等式（组）的整数解情况求参数范围

23. 已知关于 x 的不等式 $-2x + a \geq 0$ 的正整数解恰好是1, 2, 3, 4, 5, 那么 a 的取值范围是().

- A. $a > 10$ B. $10 \leq a \leq 12$ C. $10 < a \leq 12$ D. $10 \leq a < 12$

【答案】D

【解析】解不等式 $-2x + a \geq 0$ 得： $x \leq \frac{1}{2}a$.

根据题意得： $5 \leq \frac{1}{2}a < 6$,

解得： $10 \leq a < 12$.

【标注】【知识点】由不等式（组）的整数解情况求参数范围

24. 若关于 x 的不等式 $2x - m \leq 0$ 的正整数解只有4个, 则 m 的取值范围是().

- A. $8 < m < 10$ B. $8 \leq m < 10$ C. $8 \leq m \leq 10$ D. $4 \leq m < 5$

【答案】B

【解析】 $\because 2x - m \leq 0$,

$\therefore x \leq \frac{1}{2}m$,

而关于 x 的不等式 $2x - m \leq 0$ 的正整数解只有4个,

$\therefore$ 不等式 $2x - m \leq 0$ 的4个正整数解只能为1、2、3、4,

$\therefore 4 \leq \frac{1}{2}m < 5$,

$\therefore 8 \leq m < 10$.

故选B.

【标注】【知识点】由不等式（组）的整数解情况求参数范围

25. 关于 x 的不等式 $a < x < \frac{3}{2}$ 有两个整数解, 则 a 的取值范围是().

- A. $0 < a < 1$ B. $-1 \leq a < 0$ C. $0 \leq a < 1$ D. $-1 < a < 0$

【答案】B

【解析】不等式 $a < x < \frac{3}{2}$ 有两个整数解为0和1，所以 a 取值为 $-1 \leq a < 0$ 。

故选B。

【标注】【知识点】由不等式（组）的整数解情况求参数范围

三、含参不等式的最值问题

26. 已知两个非负数 a, b 满足 $2a + 3b = 7$ ，若 $m = a - b$ ，则 m 的最小值为（ ）。

- A. $-\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $-\frac{7}{3}$ D. $\frac{7}{3}$

【答案】C

【解析】 a, b 均是非负数，则 $\begin{cases} a \geq 0 \\ b = \frac{7-2a}{3} \geq 0 \end{cases}$ ，解得 $0 \leq a \leq \frac{7}{2}$ ，
 $m = a - b = a - \left(\frac{7-2a}{3}\right) = \frac{5}{3}a - \frac{7}{3}$ ，当 $a = 0$ 时 m 有最小值为 $-\frac{7}{3}$ 选C。

【标注】【知识点】不等式的性质

27. 已知实数 x, y 满足 $2x - 3y = 4$ ，且 $x \geq 0, y \leq 1$ ，且 $x - y$ 的最大值是 _____，最小值是 _____。

【答案】 $\frac{5}{2}; \frac{4}{3}$

【解析】由 $x + 2y = 10$ 解得 $x = \frac{3y+4}{2}$ ，于是 $x - y = \frac{y+4}{2}$ 。

由 $x \geq 0, y \leq 1$ ，解得 $-\frac{4}{3} \leq y \leq 1$ ，所以 $\frac{4}{3} \leq x - y \leq \frac{5}{2}$ 。

将上式代入下式得 $7y < 4y + 20 < 8y$ ，解得 $5 < y < \frac{20}{3}$ ，故 $y = 6, x = 44$ 。

【标注】【知识点】不等式的性质

28. 已知非负数 a, b, c 满足条件 $a + b = 7, c - a = 5, S = a + b + c$ ，设 S 的最大值为 m ，最小值为 n ，则 $m - n$ 的值为 _____。

【答案】7

【解析】 $\because a, b, c$ 为非负数,

$$\therefore S = a + b + c \geq 0,$$

$$\because c - a = 5 \text{ 即 } c = a + 5,$$

$$\therefore c \geq 5,$$

$$\because a + b = 7,$$

$$\therefore S = a + b + c = 7 + c,$$

$$\text{又 } \because c \geq 5,$$

$$\therefore S = 7 + c \geq 12, \text{ 即最小值 } n = 12,$$

$$\because a + b = 7,$$

$$\therefore a \leq 7,$$

$$\therefore S = a + b + c = 7 + c = 7 + a + 5 = 12 + a,$$

$$\therefore a = 7 \text{ 时 } S \text{ 最大为 } 19, \text{ 即最大值 } m = 19,$$

$$\therefore m - n = 19 - 12 = 7.$$

【标注】【知识点】一元一次不等式组的解集

29. 已知非负数 a, b, c 满足条件 $a + b - c = 2, a - b + 2c = 1$, 则 $S = a + b + c$ 最大值和最小值之和为 _____.

【答案】10

【解析】由题意得 $a + b = c + 2, a - b = 1 - 2c$, 解得 $\begin{cases} a = \frac{1}{2}(3 - c) \\ b = \frac{1}{2}(1 + 3c) \end{cases}$,

$\because a, b$ 为非负数,

$$\therefore \frac{1}{2}(3 - c) \geq 0, \frac{1}{2}(1 + 3c) \geq 0,$$

$$\text{解得 } -\frac{1}{3} \leq c \leq 3,$$

$\because c$ 为非负数,

$$\therefore 0 \leq c \leq 3,$$

$$\therefore S = a + b + c = \frac{1}{2}(3 - c) + \frac{1}{2}(1 + 3c) + c = 2c + 2,$$

$$\therefore \text{当 } c = 3 \text{ 时, } S_{\text{最大}} = 8,$$

$$\text{当 } c = 0 \text{ 时, } S_{\text{最小}} = 2,$$

所以, 和为 10.

【标注】【知识点】解一元一次不等式

30. 已知 x, y, z 为非负数, 且 $3x + y + 2z = 8, x - y + 6z = 4$, 试求 $w = x + y + z$ 的最大值及最小值.

【答案】 最大值为 $\frac{13}{2}$, 最小值为 $\frac{11}{4}$.

【解析】 由 $3x + y + 2z = 8, x - y + 6z = 4$,

$$\text{可知} \begin{cases} x = 3 - 2z \\ y = 4z - 1 \end{cases},$$

$$\text{故} \begin{cases} 3 - 2z \geq 0 \\ 4z - 1 \geq 0 \\ z \geq 0 \end{cases}, \quad \frac{1}{4} \leq z \leq \frac{3}{2},$$

$$w = x + y + z = 3z + 2,$$

$$\text{故} \frac{11}{4} \leq w \leq \frac{13}{2},$$

$$\text{最大值为} \frac{13}{2}, \text{最小值为} \frac{11}{4}.$$

【标注】 【方法】整体法

【方法】消元法

【知识点】不定方程

【知识点】解一元一次不等式组

【思想】整体思想

【思想】方程思想

【能力】运算能力

31. 已知 a, b, c, d 都是非负数, 且 $a + b = 20, a + c = 24, a + d = 22$, 求 $a + b + c + d$ 的最大值与最小值.

【答案】 最大值66, 最小值26.

【标注】 【能力】推理论证能力

【知识点】不等式的性质